XIX Российский Фестиваль юных математиков

Первый тур. Лига стратегий. Решения.

1. Назовем расстановку из условия хорошей. Докажем, что вероятность p_k того, что расстановка хорошая, равна $\frac{\mathbf{2^k}}{\mathbf{(k+1)!}}$. Индукция по k. При $k=1$ так. Заметим, что число n должно стоять в последнем столбце, вероятность этого равна $\frac{k}{n}=\frac{2}{k+1}$. При фиксированном последнем столбце на предыдущие получается аналогичное нашей задаче условие, только числа не от 1 до $k(k-1)/2$, а какие получится. Но это очевидно не важно. Так что $p_k=\frac{2}{k+1}\cdot p_{k-1}$, что и нужно.

2. Пусть O - точка пересечения AC и BD. Рассмотрим треугольники $\triangle ABQ$ и $\triangle AQF$. Применим к каждому из них теорему синусов. Получи, что $\frac{\sin\angle BAQ}{BQ}=\frac{\sin\angle ABQ}{AQ}$; $\frac{\sin\angle FAQ}{FQ}=\frac{\sin\angle AFQ}{AQ}$

Учитывая что $BQ=FQ$ получаем: $\frac{\sin\angle FAQ}{\sin\angle BAQ}=\frac{\sin\angle AFQ}{\sin\angle ABQ}$ Заметим также, что $\angle AFQ=\angle AFE+\angle EFB+\angle BFQ=\angle ABO+\angle EFB+\angle BAO=\angle EFB+\angle AOD$. И $\angle ABQ=\angle ABD-\angle FBD+\angle FBQ=\angle ABO-\angle FBD+\angle BAO=\angle AOD-\angle FBD$. Аналогично для точки P получаем: $\frac{\sin\angle FAP}{\sin\angle BAP}=\frac{\sin\angle ADP}{\sin\angle AEP}$ А также $\angle ADP=\angle AOB-\angle EDB$, и $\angle AEP=\angle AOB+\angle FED$. Учитывая, что $\angle EDB=\angle EFB$ и $\angle FED=\angle FBD$, имеем $\angle ADP+\angle AFQ=\pi$ и $\angle AEP+\angle ABQ=\pi$. Отсюда $\frac{\sin\angle FAQ}{\sin\angle BAQ}=\frac{\sin\angle FAP}{\sin\angle BAP}$ А значит точки A, P, Q лежат на одной прямой.

3. Применяя неравенство Коши-Буняковского-Шварца, получаем:

$$\left(\frac{a}{1+b^2c}+\frac{b}{1+c^2d}+\frac{c}{1+d^2a}+\frac{d}{1+a^2b}\right)\cdot\left(a+b^2ca+b+c^2db+c+d^2ac+d+a^2bd\right)\geqslant(a+b+c+d)^2$$

Далее замечаем, что $(a+b+c+d)^2=16$, а значит достаточно доказать что $a+b^2ca+b+c^2db+c+d^2ac+d+a^2bd\leqslant 8$. То есть: $b^2ca+c^2db+d^2ac+a^2bd\leqslant 4$ $2ac(b^2+d^2)+2bd(c^2+a^2)\leqslant 16$ Заметим, что по неравенству Чебышева ($2ac\leqslant a^2+c^2$, $2bd\leqslant b^2+d^2$) имеем

$$2ac\cdot(b^2+d^2)+(a^2+c^2)\cdot 2bd\leq(2ac+a^2+c^2)(2bd+b^2+d^2)\leqslant 4^2=16,$$

так как $(a+c)^2(b+d)^2\leqslant((a+c)+(b+d))^4/16=16$.

4. Пусть диагонали AD пересекает BC в точке L, $BL=x$, $LC=y$, $BD=DC=z$. Пусть также M — середина BC. Тогда $ML=|x-y|/2$. Имеем $\angle BAD=\angle CBD$ (эти острые углы опираются на равные хорды), так что $\triangle BAD\sim\triangle OBD$ по двум углам и $AB/AD=OB/OD=x/z$, аналогично $AC/AD=y/z$. Так что $(x/z)62+(y/z)^2=2$, $z^2=(x^2+y^2)/2$, из теоремы Пифагора $DM^2=z^2-MC^2=(x^2+y^2)/2-((x+y)/2)^2=((x-y)/2)^2$, так что $DM=ML$ и получаем **ответ**: $\pi/4$.

5. 1) Пусть c - нечетное составное и $c=pq$, $p\geqslant q>1$. Тогда рассмотрим равенство

$$(2a-1)^2+8c=k^2$$

$$8pq=(k-2a+1)(k+2a-1)$$

Заметим, что $k=2p+q$ и $a=(2p-q+1)/2$ - подходят. К тому же $a=p-(q-1)/2=c/q-(q-1)\leqslant c/3-1=(c-3)/3$.

2) Пусть c - нечетное простое. И пусть нашлось такое $a\leqslant(c-3)/3$ и k, что $(2a-1)^2+8c=k^2$. Тогда

$$8c=(k-2a+1)(k+2a-1)$$

Одна из скобок правой части делится на c.

Если $(k-2a+1)$ кратно c, то $(k-2a+1)\geqslant c$ и $(k+2a-1)>c+2$. Но $c\geqslant 6$, так как $(c-3)/3\geqslant 1$. Значит $8c<(k-2a+1)(k+2a-1)$ (?!).

Если $(k+2a-1)$ кратно c, то $(k+2a-1)\geqslant 2c$, и $(k-2a+1)\leqslant 4$ (так как $(k+2a-1)$ и $(k-2a+1)$ - одной четности). Значит $4a-2\geqslant 2c-4$, поэтому $a\geqslant(c-1)/2$. (?!)

6. Заметим, что треугольники: $\triangle AH_aH_{ab}$ и $\triangle ABH_a$ - подобны по 3 углам. Поэтому $AH_{ab}=\frac{AH_a^2}{AB}$. Аналогично $AH_{ac}=\frac{AH_a^2}{AC}$ и $AH_{ad}=\frac{AH_a^2}{AD}$. Заметим что, так как плоские углы при вершине A равны, то $\angle BAH_b=\angle CAH_c=\angle DAH_d$. А значит треугольники $\triangle ABH_b$, $\triangle ACH_c$ и $\triangle ADH_d$ подобны. Поэтому:

$$\frac{AH_{ba}}{AB}=\frac{AH_{ca}}{AC}=\frac{AH_{da}}{DA}$$

так как AH_{ba}, AH_{ca}, AH_{da} - в них соответственные элементы. Значит $AH_{ba}\cdot AH_{ab}=AH_{ca}\cdot AH_{ac}=AH_{da}\cdot AH_{ad}$. Ну а тогда точки H_{ab}, H_{ac}, H_{ad}, H_{ba}, H_{ca}, H_{da} лежат на одной сфере.

7. Подставим $x=y=0$. Получим: $f(f(0))=2f(0)\quad(1)$. Подставим $x=0, y=f(0)$. Получим: $f(0)=f(0)+f(f(f(0))-f(0))$. Дважды применим (1) и получим: $f(0)=f(0)+f(0)$, то есть $f(0)=0$.

Подставим $x=0$. Получим: $f(-y)=f(f(y))\quad\forall y\in\mathbb{R}\quad(2)$. Подставим $y=f(x)$. Получим $0=f(x)+f(f(f(x))-f(-x))+x$. Пользуясь (2), получаем $f(x)=-x\ \forall x\in\mathbb{R}$. Очевидно, что функция $f(x)=-x$ - подходит. *Ответ:* $f(x)=-x$.

8. Если $n^7+7=x^2$, то $n^7+2^7=x^2+11^2$. Заметим, что n нечетно (по модулю 4), а тогда $n^7+2^7=(n+2)(n^6-2n^5+\dots+2^6)$. Вторая скобка дает остаток 3 по модулю 4, так что имеет простой делитель $p=4k+3$. Если $p\neq 11$, то x^2+11^2 не может делиться на p ($x^2\equiv-11^2\Rightarrow 1\equiv x^{4k+2}\equiv-11^{4k+2}\equiv-1$ по модулю p). Если $p=11$, то получается, что x делится на 11, а тогда n дает остаток -2 модулю 11 ($n\equiv n^{21}=(n^7)^3\equiv(-2)^{21}\equiv-2$ по модулю 11). Но тогда $n^6-2n^5+\dots+2^7\equiv 7\cdot 2^7$ не делится на 11.

9. Будем доказывать утверждение задачи индукцией по n. База для очевидна. Переход $(n-1)\to n$.

Пусть многочлен $P(x)$ степени n является суммой n периодических функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$ с периодами $T_1, T_2, \ldots, T_n$ соответственно. Тогда рассмотрим многочлен $G(x) = P(x+T_1) - P(x)$. Его степень $n-1$. При этом

$$G(x) = \sum_{i=2}^{n} (f_i(x+T_1) - f_i(x))$$

И каждая из функций $h_i(x) = f_i(x+T_1) - f_i(x)$, очевидно, имеет период T_i. Значит многочлен степени $n-1$ оказался представим в виде суммы $n-1$ периодической функции. Противоречие.

10. Индукция по количеству вершин. (обозначим его за n). База для $n = 2$ очевидна. Переход $(n-1) \to n$.

Лемма: четность количества гамильтонов путей в графе не изменится если ребро $A \to B$ заменить на $B \to A$.

Доказательство (доказательство леммы ведется тоже по индукции):

Рассмотрим какой-либо гамильтонов путь проходящий по ребру $A \to B$. Пусть следующей его вершиной за B является вершина X. Тогда рассмотрим граф G_{BX} - исходный без вершины B, в котором возможно изменено одно ребро: ребро между A и X направлено в сторону X. Тогда количество гамильтоновых путей проходящих через $A \to B \to X$ в исходном графе, такое же как количество путей проходящих через $A \to X$ в G_{BX}, а оно по предположению леммы такое же по четности как количество путей проходящих через ребро AX в графе G_B — исходном графе без вершины B. Если же B была последней вершиной пути то выкинув ее, мы получили бы путь в G_B, который кончается в A. Аналогично рассматривая ребро $B \to A$ и вершины Y из которых ребро ведет в B в гамильтоновых путях через $B \to A$, получим что количество гамильтоновых путей через ребро $B \to A$ той же четности, что и количество путей в G_B в которых A начало, или в которых есть ребро YA, где Y некая вершина из тех которые ведут в B. Тогда сложив эти два количества путей мы получим, что эта сумма такая же по четности как и удвоенное количество гамильтоновых путей в G_B (удвоенное, так как каждый путь содержит два ребра через A, либо имеет A началом или концом). Таким образом сумма двух указанных значений четна, а значит они одной четности. Лемма доказана.

Теперь просто поменяем все ребра так чтобы остался только один гамильтонов путь и получим, что в начале их было нечетное число.

Первый тур. Лига Тактик. Решения.

1. см. задачу из лиги стратегий.

2. Обозначим I_B и I_C проекции точки I на катеты AC и AB соответственно. Отрезки II_B и II_C — это радиусы вписанной окружности, будем считать, что они равны 1. Также обозначим $\angle ABC = 2\beta$, $\angle BCA = 2\gamma$. Рассмотрим треугольник BII_C. В нем $\angle IBI_C = \beta$,и он прямоугольный, откуда $BI = \frac{1}{\sin\beta}$. Аналогично из треугольника IDI_B получаем, что $ID = \frac{1}{\cos\beta}$. Откуда $BI \cdot ID = \frac{2}{\sin 2\beta}$. Аналогично $CI \cdot IE = \frac{2}{\sin 2\gamma}$, откуда и следует требуемое.

3. Обозначим $x = 1/a$, $y = 1/b$, $z = 1/c$, тогда $xyz = 1$, а неравенство примет вид:

$$1 + \frac{3}{xy+yz+zx} \geqslant \frac{6}{x+y+z}.$$

Так как $(x+y+z)^2 \geqslant 3(xy+yz+zx)$, то левую часть можно оценить как:

$$1 + \frac{3}{xy+yz+zx} \geqslant 1 + \frac{9}{(x+y+z)^2}.$$

В последнем неравенства правая часть, очевидно, больше, чем $\frac{6}{x+y+z}$ по неравенству $A^2 + B^2 \geqslant 2AB$.

4. см. задачу из лиги стратегий.

5. см. задачу из лиги стратегий.

6. Пусть F_A — проекция F на AS. Заметим, что $SA \cdot SF_A = SF^2$, то есть константа для всех четырех ребер. Значит инверсия с центром в S и подходящим коэффициентом переводит $ABCD$ в $F_AF_BF_CF_D$, значит эти точки тоже лежат на одной окружности.

7. Рассмотрим девять поворотов пяти красных точек. Заметим, что каждая красная точка пять раз попадет на синию, значит всего будет 25 попаданий. Значит в одном из девяти положений было хотя бы три попадания красных точек на синие, что и дает требуемые два треугольника.

8. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ значит, либо $a+b$ делится на p^2, либо $a^2 - ab + b^2$ делится на p. В первом случае мы получили то, что требовалось, во втором имеем $a^2 - ab + b^2 = (a+b)^2 - 3ab$ делится на p, значит $3ab$ делится на p. Так как $p \neq 3$, следовательно либо a, либо b делится на p. Тогда они оба делятся на p, а, следовательно, $a^3 + b^3$ делится на p^3.

9. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c = h_1(x) + h_2(x)$, где $h_1(x)$ и $h_2(x)$ — это периодические функции с периодами t_1 и t_2 соответственно. Тогда $f(x+t_1) - f(x) = Ax + B = h_2(x+t_1) - h_2(x)$ — это с одной стороны линейная функция, а с другой — периодическая с периодом t_2.

10. Пронумеруем теннисистов номерами от 1 до 10. Пусть 1 выиграл у 2, 2 выиграл у 3 и 3 выиграл у 1, а в остальных матчах положим, что выиграл теннисист с меньшим номером. Заметим, что имеется три требуемых расстановки: $1, 2, 3, 4, \ldots, 9, 10$ и две перестановки, отличающиеся от приведенной циклической перестановкой первых трех теннисистов. Других способов нет, так как последние 7 теннисистов определяются однозначно, а первые три могут иметь ровно три порядка.